Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1975 Nice ∾

EXERCICE 1

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. On donne trois points distincts A, B, C de $\mathscr{E}$. Soit f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$M \longmapsto f(M) = 2\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + 3\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2.$$

1. Justifier l'existence de G barycentre des points A, B, C, affectés respectivement des coefficients 2, 3, −2.
   Donner une relation vérifiée par les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$.
2. Montrer que $f(M) = 3\left\|\overrightarrow{MG}\right\|^2 + k$ où $k = f(G)$.
3. Discuter suivant les valeurs de k, la nature de l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $f(M) = 4$.

EXERCICE 2

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{\left|x^2 + x\right| + 1}{|x| + 1}$$

1. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ et $x_1 = -1$.
2. Représentation graphique de f en repère orthonormé. On précisera en particulier les asymptotes à la courbe représentative.

PROBLÈME

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on définit l'opération T de la façon suivante :
si $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $z' = \alpha' + \mathrm{i}\beta'$ sont deux éléments quelconques de $\mathbb{C}$,

$$z \mathrm{T} z' = \alpha\alpha' + \mathrm{i}\left(\alpha\beta' + \beta\alpha'\right)$$

1. Montrer que $(\mathbb{C}, +, \mathrm{T})$ est un anneau commutatif.
2. Si $u = \gamma + \mathrm{i}\delta$ et $u' = \gamma' + \mathrm{i}\delta'$ sont deux nombres complexes donnés, résoudre et discuter l'équation d'inconnue z :

   $$(1) \qquad u \mathrm{T} z = u' \quad \text{où} \quad z \in \mathbb{C}.$$

   On montrera que si u est imaginaire pur, l'équation est impossible ou indéterminée. Lorsqu'il y a indétermination, donner toutes les solutions.

3. Pour tout nombre complexe z, on pose $z^{[0]} = 1$ et on définit par récurrence $z^{[n]} = z \text{ T } z^{[n-1]}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Calculer :

a. $\text{i}^{[n]}$

b. $(\alpha + \text{i}\beta)^{[n]}$

puis résoudre et discuter l'équation :

$$z^{[n]} = u'.$$

où u' est un nombre complexe donné, où z est l'inconnue complexe et $n \geqslant 2$.

4. On considère l'ensemble $\mathscr{M}$ des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où $(\alpha\ ;\ \beta) \in \mathbb{R}^2$, muni de l'addition et de la multiplication des matrices.

Montrer que $(\mathscr{M}, +, \times)$ est un anneau isomorphe à $(\mathbb{C}, +, \text{T})$.

Partie B

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2, muni d'une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthonormée.
On note 0_{E} le vecteur nul de E.
On note $f_{\alpha,\ \beta}$ l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

1. Quelles sont les applications $f_{\alpha,\ \beta}$ involutives ?

2. **a.** Discuter suivant les valeurs de α et β la nature du noyau de $f_{\alpha,\ \beta}$ (on rappelle que le noyau de $f_{\alpha,\ \beta}$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que $f_{\alpha,\ \beta}\left(\vec{u}\right) = 0_{\text{E}}$).

b. Pour quelles valeurs de α et β, $f_{\alpha,\ \beta}$ est-elle bijective ?

3. On prend $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.

a. Écrire la matrice M sous la forme I + A où $\text{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Montrer que A est la matrice de l'application composée $p \circ s$ où s désigne la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle de base $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et où p est la projection orthogonale sur une droite que l'on précisera.

Partie C

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien associé à E et rapporté au repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est la base de E définie en B.
Soit F l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ associée à $f_{1,\ 1}$ et telle que $F(\text{O}) = \text{O}$.
Soit P la courbe d'équation $2X - Y^2 = 0$ dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Quelle est la nature de P ? La représenter graphiquement dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

2. **a.** Montrer que l'image réciproque Q de P par F admet pour équation :

$$2X + 1 = (Y - 1)^2.$$

b. Quelle est la nature de Q ? Représenter cette courbe sur le même dessin que P.

3. Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe Q et l'axe des y.